Untersuchung einiger durch das Rollen von Kegelschnitten auf einer Geraden entstehenden Curven.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

bei

hoher philosophischer Fakultät zu Marburg

eingereicht von

W. Reinhardt,
aus Battenberg.

Marburg.
Universitäts-Buchdruckerei (R. Friedrich).
1885.

Untersuchung
einiger durch das Rollen von Kegelschnitten
auf einer Geraden entstehenden Curven.

Herrn

Professor Dr. Heinrich Weber

hochachtungsvoll gewidmet

vom Verfasser.

Herrn

Professor Dr. Heinrich Weber

hochachtungsvoll gewidmet

vom Verfasser.

Lässt man auf einer festliegenden gegebenen Curve I eine durch ihre Gleichung ebenfalls bekannte Curve II rollen, ohne dass das Rollen in ein Gleiten übergeht, so beschreibt jeder mit Curve I festverbundene Punkt eine Curve, genannt Rollcurve oder Roulette, während Curve I als Basis, Curve II als rollende Curve bezeichnet wird.

Die Gleichung der Basis in rechtwinkeligen Coordinaten sei $f_1(\xi, \eta) = 0$, diejenige der rollenden Curve in Polar-Coordinaten, bezogen auf den erzeugenden Punkt als Pol und eine beliebige mit der rollenden Curve festverbundene Axe, sei $f_2(\nu, \varphi) = 0$ und die der Rollcurve: $F(x, y) = 0$.

Der Zusammenhang zwischen diesen drei Linien wird durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

1) $(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2 = r^2$.

2) $(y-\eta)\frac{dy}{dx} + (x-\xi) = 0$.

3) $\left[(y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi} + (x-\xi)\right]\sqrt{\nu^2 + \left(\frac{d\nu}{d\varphi}\right)^2} + \nu\frac{d\nu}{d\varphi}\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} = 0$.

Gleichung (1) ist diejenige eines der Kreise, als deren Einhüllende man die Rollcurve betrachten kann; Gl. (2) besagt, dass der zu diesem Kreise gehörige Radius Normale der Rollcurve ist, sodass: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-\xi}{y-\eta}$; Gl. (3) wird durch partielle Differentiation nach ξ aus der ersten Gleichung gewonnen:

$$(y-\eta)\frac{d\eta}{d\xi} + (x-\xi) + \nu\frac{d\nu}{d\xi} = 0,$$

wenn man in diese Gleichung den Wert von $\frac{d\nu}{d\xi}$ einsetzt, der sich aus der Grundgleichung ergiebt:

$$\sqrt{1+\left(v\frac{d\varphi}{dv}\right)^2}dv = \sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}.d\xi$$

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^2}} = \frac{\frac{dv}{d\varphi}\sqrt{1+\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}}{\sqrt{v^2+\left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2}}$$

Führen wir in obige drei Gleichungen zur Abkürzung die Bezeichnungen ein:

$$\frac{dy}{dx} = y'; \quad \frac{dv}{d\varphi} = v'; \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \eta',$$

so nehmen sie die Form an:

1) $(y-\eta)^2+(x-\xi)^2 = r^2.$

2) $(y-\eta)y'+x-\xi = 0.$

3) $\left[(y-\eta)\eta'+x-\xi\right]\sqrt{r^2+r'^2}+vv'\sqrt{1+\eta'^2} = 0.$

Es kann nun die Aufgabe gestellt werden, die Curve zu bebestimmen, welche ein Brennpunkt des Kegelschnittes beschreibt, wenn letzterer auf einer geraden Linie als Basis rollt, ein Problem, welches gewisse Ähnlichkeit hat mit jenem, bei welchem als rollende Curve der Kreis und als erzeugender Punkt ein Punkt der Peripherie betrachtet wird. Die hierbei entstehende Curve ist die gemeine Cycloide; die Punkte innerhalb der Kreisperipherie beschreiben »gestreckte oder verlängerte Cycloiden« und die ausserhalb gelegenen Punkte »verkürzte oder verschlungene Cycloiden«. Die Cycloide nahm das Interresse der Mathematiker des 17. Jahrhunders sehr in Anspruch, und hervorragende Geometer wandten ihr viel Zeit zu, sodass der Ausdruck »Liebling der Geometer« nicht unzutreffend ist. Nach Galilei, der sie (1630) rein geometrisch behandelte, beschäftigten sich Roberval (1634), Descartes, Fermat, Viviani, Wallis (1671), Toricelli, welcher den Inhalt der Cycloide bestimmte, Pascal (1658) und Huygens mit derselben. Von diesem stammt die Bezeichnung der Cycloide als Tautochrone, während Bernouilli diese Curve als Brachistochrone bestimmte. Groeningius schrieb 1701: »historia cycloidis«, Boscovich 1745: »de cycloida et logistica«. Sodann beschäftigte sich noch Bossut mit dieser Curve in seiner Abhandlung: »nouvelle manière de démontrer les propriétés

de la cycloide«. Ueber Cycloide und Epicycloide, welche 1674 von Römer entdeckt wurde, verfasste de la Hire zwei Abhandlungen: »Traité des Roulettes« (1706) und »méthode générale pour réduire tontes les lignes courbes à des Roulettes« (1708). Neuere Bearbeitungen rühren her von Weissenborn (1856): »cyklische Curven« und Proctor: »a treatise on the cycloid« (1877), sowie von Zehme: »elementare und analytische Behandlung der verschiedenen Cycloiden« (1854), ferner erwähne ich noch die Abhandlung von Ganter: »Ueber die Rouletten der Kegelschnitte« (1880). Hartmann behandelte in seiner Arbeit: »Untersuchung einiger Curven, die durch das Rollen von Kegelschnitten erzeugt werden« (1876) die Aufgabe, die Curven zu bestimmen, an welcher eine Kegelschnittlinie rollen muss, damit ein Brennpunkt derselben sich in einer geraden Linie fortbewege, während es die Aufgabe vorliegender Untersuchung ist, die Curven zu bestimmen, welche ein Brennpunkt der Kegelschnittlinie beschreibt, wenn diese auf einer Geraden rollt.

Nehmen wir die Basis als Abscissenaxe an, so ist $\eta=0$; $\frac{d\eta}{d\xi}=\eta'=0$ und die Gleichungen (2) u. (3) nehmen nach Elimination von $x-\xi$ die einfachere Form an:

$$(4)\quad y^2(1+y'^2)=r^2, \text{ oder } y=\pm\frac{r}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$(5)\quad yy'\sqrt{r^2+r'^2}=rr', \text{ oder } y'^2=\frac{r'^2}{r^2}$$

Durch Elimination von φ zwischen diesen beiden Gleichungen ergiebt sich die Differential-Gleichung unserer Roulette. —

Wir gehen aus von der Polargleichung der Kegelschnitte:

$$(6)\quad r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

wobei $\varepsilon=\frac{e}{a}$ das Verhältniss der Excentricität zur Hauptaxe und $p=\frac{b^2}{a}$ der halbe Parameter ist. Die speciellen Gleichungen der drei Kegelschnitte erhält man aus Gl. (6), wenn man setzt:

für $p=\frac{b^2}{a}$; $a^2\varepsilon^2=a^2-b^2$; $\varepsilon<1$; Gleichung der Ellipse

für $p = \frac{b^2}{a}$; $a^2\varepsilon^2 = a^2 + b^2$; $\varepsilon > 1$; Gleichung der Hyperbel

für $\varepsilon = 1$ . . . . . ; Gleichung der Parabel.

Durch Differentiation ergiebt sich aus Gl. (6):

$$\frac{dv}{d\varphi} = v' = \frac{p\varepsilon \sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}, \text{ mithin:}$$

$$(5') \quad y' = \frac{v'}{v} = \frac{\varepsilon \sin\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

Die Elimination von φ aus den Gleichungen (4) u. (5') geschieht folgermassen:

Nach (4) ist: $$y = \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$y = \frac{p}{(1+\varepsilon\cos\varphi)\sqrt{1+y'^2}}$$

mithin

$$1+\varepsilon\cos\varphi = \frac{p}{y\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{p - y\sqrt{1+y'^2}}{\varepsilon y\sqrt{1+y'^2}}$$

und demnach $$\sin\varphi = \frac{1}{\varepsilon y\sqrt{1+y'^2}} \sqrt{y(1+y'^2)(\varepsilon^2-1) - p^2 + 2py\sqrt{1+y'^2}}$$

Durch Einsetzung der für $\sin\varphi$ u. $1+\varepsilon\cos\varphi$ gefundenen Werte in die Gl. (5') geht diese über in:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{p}\sqrt{y^2(1+y'^2)(\varepsilon^2-1) - p^2 + 2py\sqrt{1+y'^2}}$$

Um aus dieser Gleichung y' zu erhalten, quadrieren und ordnen wir sie und erhalten:

$$y'^2 - \frac{2py}{p^2 - y^2(\varepsilon^2-1)}\sqrt{1+y'^2} = -1$$

Addieren wir auf beiden Seiten 1, so ergiebt sich für:

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{2py}{p^2 - y^2(\varepsilon^2-1)} \text{ und hieraus:}$$

$$(7) \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2p^2y^2(\varepsilon^2+1) - y^4(\varepsilon^2-1)^2 - p^4}}{p^2 - y^2(\varepsilon^2-1)}$$

Durch Integration dieser Differential-Gleichung folgt:

$$(8)\quad \int \frac{p^2 - y^2(\varepsilon^2 - 1)}{\sqrt{2p^2y^2(\varepsilon^2+1) - y^4(\varepsilon^2-1)^2 - p^4}}\, dy = x + Const.$$

Führen wir die angegebene Integration aus, nachdem wir die speciellen Werte für p u. ε eingesetzt haben, so ergeben sich hieraus die Gleichungen der den einzelnen Kegelschnittlinien entsprechenden Rollcurven.

I. Bestimmung der Rollcurve, welche ein Brennpunkt der Ellipse beschreibt, wenn letztere auf einer Geraden rollt.

Bei der Ellipse ist

$$p = \frac{b^2}{a};\quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Durch Einsetzung dieser Werte in Gl. (6) erhalten wir die Polargleichung der Ellipse:

$$(1)\quad r = \frac{b^2}{a + e\cos\varphi}$$

und durch Einsetzung derselben Ausdrücke in Gl. (8).

$$(2)\quad \int \frac{b^2 + y^2}{\sqrt{y^2(2a)^2 - (y^2 + b^2)^2}}\, dy = x + Const.$$

Da in dem Ausdruck unter der Wurzel y in der vierten Potenz vorkommt, erhalten wir elliptische Integrale durch Integration der beiden Integrale:

$$(A)\quad b^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2(2a)^2 - (y^2 + b^2)^2}}$$

und

$$(B)\quad \int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{y^2(2a)^2 - (y^2 + b^2)^2}}$$

Die Entwickelung ist folgende:
der Radikand 4. Grades lässt sich darstellen als das Produkt der 4 Wurzelfaktoren:

$$-(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)(y - y_4),$$

wobei

$$y_4 = a + e;\ y_2 = -a + e$$
$$y_3 = a - e;\ y_1 = -a - e$$

ist, die sich als Wurzeln der Gleichung 4. Grades

$$y^4 + 2y^2(b^2 - 2a^2) + b^4 = 0$$

ergeben.

$$y = \pm\sqrt{2a^2 - b^2 \pm 2a\sqrt{a^2 - b^2}}$$
$$= \pm\sqrt{a^2 + e^2 \pm 2ae} = \pm(a \pm e),$$

wobei wir sie so anordnen, dass $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ ist; y liegt dann zwischen y_3 u. y_4 d. h. zwischan $a - e$ und $a + e$.

Der so erhaltene Integralausdruck

$$(3)\quad b^2\int\frac{dy}{\sqrt{Y}} = b^2\int\frac{dy}{\sqrt{-(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)}}$$

wird durch die lineare Substitution:

$$y = \frac{r + sz}{1 + z} \qquad \left[z = \frac{v - y}{y - s}\right]$$

$$dy = \frac{s - r}{(1+z)^2}\,dz$$

umgeformt und nimmt folgende Gestalt an:

$$(4)\quad b^2(s-r)\int\frac{dz}{\sqrt{-Y_1 Y_2 Y_3 Y_4}},$$

wobei

$$Y_1 = (v - y_1) + (s - y_1)z$$

und dementsprechend die anderen Y beschaffen sind. Sollen nun in dem Produkte $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ nur gerade Potenzen von Z vorkommen, so müssen die in $Y_1 Y_2$ u. $Y_3 Y_4$ vorkommendere Coefficienten von Z verschwinden, d. h. es muss:

$$vs - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(v + s) + y_1 y_2 = 0$$

$$vs - \frac{1}{2}(y_3 + y_4)(v + s) + y_3 y_4 = 0$$

sein.

Daraus ergeben sich folgende Werte für

$$(5)\quad \frac{1}{2}(v + s) = \frac{y_1 y_2 - y_3 y_4}{(y_1 + y_2) - (y_3 + y_4)} = \frac{a^2 - e^2 - a^2 + e^2}{-2a - 2e} = 0$$

$$(6)\quad \frac{1}{2}(v-s)=\frac{\sqrt{(y_1-y_3)(y_1-y_4)(y_2-y_3)(y_2-y_4)}}{(y_1+y_2)-(y_3+y_4)}=\frac{-4a\sqrt{a^2-e^2}}{-4a}=b$$

Daraus folgt:

$$v=b$$
$$s=-b$$
$$(7)\quad s-r=-2b$$

Unser Integral (4) können wir darstellen in der Form:

$$(8)\quad b^2(s-r)\int\frac{dz}{\sqrt{B(z^2-b_1)(z^2-b_2)}},$$

wobei

$$B=-(s-y_1)(s-y_2)(s-y_3)(s-y_4)$$

$$b_1=-\frac{(v-y_1)(v-y_2)}{(b-y_1)(s-y_2)}\text{ und }b_2=-\frac{(v-y_3)(v-y_4)}{(s-y_3)(s-y_4)}$$

Durch Einsetzung der Werte für v, s u. y_1, y_2 y, erhalten wir:

$$B=-\left[(a^2-b^2)^2-2e^2(a^2+b^2)+e^4\right]$$
$$=-\left[e^4-2e^2(a^2+b^2)-e^4\right]$$
$$=2e^2(a^2+b^2-e^2)=4b^2e^2$$

$$b_1=-\frac{b+a}{b-a};\quad b_2=-\frac{b-a}{b+a}$$

Mithin:

$$(8')\quad -2b^3\int\frac{dz}{\sqrt{4b^2e^2\left(z^2+\frac{b+a}{b-a}\right)\left(z^2+\frac{b-a}{b+a}\right)}}$$

$$=-\frac{b^2}{e}\int\frac{dz}{\sqrt{\left(z^2-\frac{a-b}{a+b}\right)\left(z^2-\frac{a+b}{a-b}\right)}}$$

z liegt zwischen $\pm\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ und man gelangt daher zur Normalform, wenn man setzt:

$$z=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sin\psi;\quad K=\frac{a-b}{a+b}$$

$$dz=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\cos\psi\,.\,d\psi$$

Integral (8′) nimmt in Folge dieser Substitutionen folgende Gestalt an:

$$(9)\quad -\frac{b^2}{e}\int \frac{\cos\psi\, d\psi \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}{\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\sin^2\psi - \frac{a-b}{a+b}\right)\left(\frac{a-b}{a+b}\sin^2\psi - \frac{a+b}{a-b}\right)}}$$

$$= -\frac{b^2}{e}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{a+b}{a-b}\int \frac{\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{(\sin^2\psi - 1)\left(\sin^2\psi - \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2\right)}}$$

$$(10)\quad = +\frac{b^2}{a+b}\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

$$(A)\quad = \frac{b^2}{a+b}(F\psi, k)$$

Auf das Integral (B) $\int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2+b^2)^2}}$ wenden wir dieselbe Substitution an:

$$y = \frac{r+sz}{1+z} = \frac{b(1-z)}{1+z},$$

wodurch es übergeht in:

$$(11)\quad b^2(s-r)\int \frac{\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2 dz}{\sqrt{B(z^2-b_1)(z^2-b_2)}}$$

Die im Zähler stehende Funktion von z wird derart umgeformt, dass sie als Summe einer Funktion von graden und von ungeraden Potenzen von z erscheint:

$$\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2 = \frac{(1+z^2)^2 + 4z^2}{(1+z^2)^2 - 4z^2} - 4z\,\frac{1+z^2}{(1+z^2)^2 - 4z^2}$$

Gl. (11) lautet in Folge dessen, nachdem mir für $s-r$ den Wert $-2b$ eingesetzt:

$$(12)\quad -2b^3\left[\int \frac{(1+z^2)^2 + 4z^2}{(1-z^2)^2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{Z}} - 4\int \frac{1+z^2}{(1-z^2)^2}\cdot\frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}\right]$$

wobei $\sqrt{Z} = \sqrt{B(z^2-b_1)(z^2-b_2)}$ ist.

Substituieren wir im 2. Integral

$$v = z^2\,;\quad dv = 2z\,dz$$

so geht es über in:

$$(13)\quad \frac{1}{4be}\int \frac{(1+v)\,dv}{(1-v)^2\sqrt{v^2 - 2v\,\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+1}}$$

$$= \frac{1}{4be}\int \frac{dv}{(1-v)^2\sqrt{v^2 - 2\,\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,v+1}}$$

$$+ \frac{1}{4be}\int \frac{v\,dv}{(1-v)^2\sqrt{v^2 - 2\,\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\,v+1}}$$

Durch die Substitution:

$$1 - v = u$$
$$dv = -du$$

erscheinen diese zwei Integrale unter der Form:

$$(14) -\frac{1}{2b}\int \frac{du}{u^2\sqrt{e^2u^2+4b^2u-4b^2}} + \frac{1}{4b}\int \frac{du}{u\sqrt{e^2u^2+4b^2u-4b^2}}$$

Nun ist aber:

$$\int \frac{du}{u^n\sqrt{U}} = \frac{-\sqrt{U}}{(n-1)\gamma\cdot u^{n-1}} - \frac{n-\frac{3}{2}}{n-1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{U}} - \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{U}}$$

wobei $\sqrt{U} = \sqrt{\alpha u^2+\beta u+\gamma} = \sqrt{e^2u^2+4b^2u-4b^2}$ ist.

Mit Benutzung dieser Reduktionsformel geht (14) über in:

$$(15)\quad -\frac{1}{2b}\int \frac{du}{u^2\sqrt{U}} + \frac{1}{4b}\int \frac{du}{u\sqrt{U}}$$

$$= -\frac{1}{2b}\left[\frac{-\sqrt{U}}{\gamma\cdot u} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\int \frac{du}{u\sqrt{U}} + \frac{1}{4b}\int \frac{du}{u\sqrt{U}}\right]$$

$$= +\frac{1}{2b}\cdot\frac{\sqrt{e^2u^2+4b^2u-4b^2}}{-4b^2u} - \frac{1}{4b}\int \frac{du}{u\sqrt{U}} + \frac{1}{4b}\int \frac{du}{u\sqrt{U}}$$

$$= -\frac{1}{8b^3}\cdot\frac{\sqrt{e^2u^2+4b^2u-4b^2}}{u}$$

Durch Einsetzung des Wertes von $u = 1 - z^2$ geht dieser Ausdruck über in:

$$(16) \quad \int \frac{z(1+z^2)\,dz}{(1-z^2)^2\sqrt{Z}} = -\frac{1}{8b^3}\cdot\frac{\sqrt{e^2z^4 - 2(a^2+b^2)z + e^2}}{1-z^2}$$

Führen wir den Wert von $z = \frac{b-y}{y+b}$ hierin ein, so ergiebt sich als Endresultat für das 2. Integral in (12)

$$(17) \quad +8b^3\int \frac{z(1+z^2)\,dz}{(1-z^2)^2\sqrt{Z}} = -\frac{1}{2y}\sqrt{4a^2y^2 - (y^2+b^2)^2}$$

In dem 1. Integral von (12), das nur gerade Potenzen von z enthält, zerlegen wir die Funktion von z^2 in eine ganze und eine echt gebrochene, welche letztere wir dann noch in Partialbrüche zerlegen:

$$(13_a) \quad \int \frac{(1+z^2)+4z^2}{(1-z^2)^2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \int \frac{dz}{\sqrt{Z}} + 8\int \frac{z^2\,dz}{(1-z^2)^2\sqrt{Z}}$$

Das erste dieser beiden Integrale ist ein elliptisches Integral I. Gattung, wie das in (10) enthaltene. Das zweite lässt sich zerlegen in die beiden folgenden:

$$(14^a) \quad 8\int \frac{z^2\,dz}{(1-z^2)^2\sqrt{Z}} = 8\left[\int \frac{dz}{(1-z^2)^2\sqrt{Z}} - \int \frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{Z}}\right]$$

$$= 8\left[\int \frac{dz}{(z^2-1)^2\sqrt{Z}} + \int \frac{dz}{(z^2-1)\sqrt{Z}}\right]$$

Wir benutzen die Reduktionsformel:

$$\frac{z\sqrt{Z}}{(z^2+c)^{n-1}} = a'\int \frac{dz}{(z^2+c)^{n-3}\sqrt{Z}} + b'\int \frac{dz}{(z^2+c)^{n-2}\sqrt{Z}}$$

$$+c'\int \frac{dz}{(z^2+c)^{n-1}\sqrt{Z}} + d'\int \frac{dz}{(z^2+c)^n\sqrt{Z}}$$

wobei:

$$
\begin{aligned}
a' &= +(2n-5)\,B_4 \\
b' &= +(2n-4)(B_2 - 3c\,B_4) \\
(15^a)\quad c' &= -(2n-3)(B_0 - 2c\,B_2 + 3c^2\,B_4) \\
d' &= -(2n-2)(-c\,B_0 + c^2\,B_2 - c^3\,B_4)
\end{aligned}
$$

$$
\sqrt{Z} = \sqrt{B_4(z^2-b_1)(z^2-b_2)} = \sqrt{B_4 z^4 + B_2 z^2 + B_0}
$$

$$
= \sqrt{4b^2e^2z^4 - 8b^2(a^2+b^2)z^2 + 4b^2e^2}
$$

Durch Einführung der Werte von B_4, B_2, B_0, $n=2$ u. $c=-1$ erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
a' &= +4b^2e^2 \\
b' &= 0 \\
c' &= -\left(16b^2e^2 - 16b^2(a^2+b^2)\right) = +32b^4 \\
d' &= -2\left(8b^2e^2 - 8b^2(a^2+b^2)\right) = +32b^4
\end{aligned}
$$

Es wird also das erste Integral in (14^a)

$$
\int \frac{dz}{(z^2-1)^2\sqrt{Z}} = \frac{z\sqrt{Z}}{d'(z^2-1)} - \frac{a'}{d'}\int \frac{dz\,(z^2-1)}{\sqrt{Z}} - \frac{b'}{d'}\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}
$$

$$
- \frac{c'}{d'}\int \frac{dz}{(z^2-1)\sqrt{z}}
$$

Da in nach (14^a) $+\int \frac{dz}{(z^2-1)\sqrt{z}}$ hinzukommt, fügen wir dies hier gleich an und erhalten:

$$
(16^a)\quad \int \frac{dz}{(z^2-1)^2\sqrt{Z}} + \int \frac{dz}{(z^2-1)\sqrt{Z}} = \frac{z\sqrt{Z}}{32b^4(z^2-1)}
$$

$$
- \frac{e^2}{8b^2}\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{Z}} + \frac{e^2}{8b^2}\int \frac{dz}{\sqrt{Z}}
$$

Das hierin vorkommende Integral $\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{Z}}$ formen wir um durch die Substitution:

$$
z = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sin\psi \qquad k = \frac{a-b}{a+b}
$$

$$
dz = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cos\psi\,.\,d\psi
$$

und erhalten:

$$(16^b)\quad \int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{Z}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{1}{2b\,e}\cdot\frac{a-b}{a+b}\int \frac{-\sin^2\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\,d\psi$$

$$= -\frac{a-b}{2b\,(a+b)^2}\int \frac{\sin^2\psi}{\Delta(\psi)}\,d\psi$$

wobei $\Delta(\psi, k) = \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}$ ist. Da ferner:

$$\frac{\sin^2\psi}{\Delta(\psi)} = \frac{1}{k^2}\left[\frac{k^2\sin^2\psi}{\Delta(\psi)}\right]$$

$$= \frac{1}{k^2}\left[\frac{1-\Delta^2(\psi)}{\Delta(\psi)}\right]$$

$$= \frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{\Delta(\psi)} - \Delta(\psi)\right] \text{ ist,}$$

erhalten wir für das in (16^b) erhaltene Integral:

$$-\frac{1}{2b\,(a-b)}\left\{\int\frac{d\psi}{\Delta(\psi)} - \int\Delta(\psi)\,d\psi\right\}$$

$$= -\frac{1}{2b\,(a-b)}\left\{F(\psi, k) - E(\psi, k)\right\}$$

Setzt man die erhaltenen Resultate in (14^a) ein, so hat man:

$$8\left[\int\frac{dz}{(z^2-1)^2\sqrt{Z}} + \int\frac{dz}{(z^2-1)\sqrt{Z}}\right]$$

$$= 8\left[\frac{z\sqrt{Z}}{32b^4(z^2-1)} + \frac{e^2}{16b^3(a-b)}\big(F(\psi) - E(\psi)\big) + \frac{e^2}{8b^2}\int\frac{dz}{\sqrt{Z}}\right]$$

Hierzu kommt noch nach $(13^a)\int\frac{dz}{\sqrt{Z}}$ sodass schliesslich für das 1. Integral in (12) folgender Wert resultirt:

$$(17^a)\quad -2b^3\int\frac{(1+z^2)^2+4z^2}{(1-z^2)^2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

$$= -2ba^2\int\frac{dz}{\sqrt{Z}} - \frac{z\sqrt{Z}}{2b\,(z^2-1)} - \frac{e^2}{a-b}\big(F(\varphi) - E(\psi)\big)$$

$$= \left(\frac{2ba^2}{2b\,(a+b)} - \frac{e^2}{a-b}\right)F(\psi, k) - \frac{z\sqrt{Z}}{2b\,(z^2-1)} + \frac{e^2}{a-b}E(\psi, k)$$

$$= -\frac{b(2a+b)}{a+b} F(\psi,k) - \frac{y-b}{2y(y+b)} \sqrt{4a^2y^2-(y^2+b^2)^2} + (a+b)E(\psi,k).$$

Hierzu kommt noch der in (17) für das 2. Integral in (12) gefundene Wert, sodass sich für unser zweites Haupt-Integral ergiebt:

$$\text{(B)} \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{4a^2y^2-(y^2+b^2)^2}} = -\frac{b(2a+b)}{a+b} F(\psi,k) - \\ - \frac{1}{y+b} \sqrt{4a^2y^2-(y^2+b^2)^2} + (a+b)E(\psi,k)$$

Wird hierzu noch nach (10) der Wert des I. Haupt-Integrals (A) addiert, so ergiebt sich als Endgleichung für die durch das Rollen der Ellipse entstehende Rollcurve:

$$\text{(I, 2a)} \quad x + Const. = -\frac{1}{y+b} \sqrt{4a^2y^2-(y^2+b^2)^2} - \\ - \frac{2ab}{a+b} F(\psi,k) + (a+b)E(\psi,k)$$

Der Zusammenhang zwischen ψ, y, k, a, b u. e ist folgender:

$$k = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\sin\psi = z \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{b-y}{y+b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

Zur Bestimmung der Integrations-Constanten hat man in (I, 2a) für y den Wert $a-e$ einzusetzen, zu dem $x = 0$ gehört, wenn man als Anfangslage der Ellipse diejenige annimmt, bei welcher die Hauptaxe mit der y-Axe zusammenfällt.

Der Wert für $\sin\psi$ ist für $y = a - e$ der folgende:

$$\sin\psi_0 = \frac{b-(a-e)}{b+(a-e)} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \\ = \frac{b^2-(a-e)^2}{[b+(a-e)]^2} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ = \frac{2e(a-e)(a+b)}{2(a+b)(a-e)e} \\ = 1$$

$$\text{also } \psi_0 = 90^0 = \frac{\pi}{2}$$

Nun ist:

$$(a)\quad F(\psi, k) = a_0\,\psi - \frac{a_2}{2}\sin 2\psi + \frac{a_4}{4}\sin 4\psi - \ldots$$

wobei $a_0 = \frac{2}{\pi}.K = \frac{2}{\pi}.\frac{\pi(1+k_1)}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k_1^4+\ldots\right\}$

hierbei ist $$k_1 = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a+b+2\sqrt{ab}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2$$

$$(b)\quad E(\psi, k) = b_0 + \frac{1}{4}k^2(b_2\sin 2\psi - b_4\sin 4\psi + \ldots)$$

wobei

$$b_0 = \frac{2}{\pi}.E$$

$$b_2 = \frac{2a_0 - a_4}{4} \text{ etc. etc.}$$

Für $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ wird:

$$F(\psi_0\, k) = a_0\psi_0 = \frac{2}{\pi}.K.\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi(a+b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2.k_1^4+\ldots\right\}$$

und $E(\psi_0\, k) = b_0 = \frac{2}{\pi}.E = (1-k_1)\left\{1+5\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k_1^4+\ldots\right\}$

$$= \frac{2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\left\{1+5\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)k_1^4+\ldots\right\}$$

Der algebraische Teil des Integrals nimmt für $y = a - e$ den Wert an:

$$-\frac{1}{a-e+b}\sqrt{3a^4-4a^3e-3a^4+4a^3e} = 0$$

Die Constante hat also den Wert:

$$(\alpha)\quad C = -\frac{2ab}{a+b}F(\psi_0, k) + (a+b)E(\psi_0, k)$$

Um sie numerisch zu berechnen, bedient man sich des Ausdruckes, den man erhält, wenn man die Werte von $F(\psi_0, k)$ und $E(\psi_0, k)$ hierin einführt:

$$(\beta)\quad C=\frac{2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\left[-\pi\sqrt{ab}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+\ldots\right\}+\right.$$

$$\left.+(a+b)\left\{1+5\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+9\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k_1^4+\ldots\right\}\right]$$

Führen wir in dem Ausdrucke für x in (I, 2*) den Wert der Constanten nach (α) ein, so lassen sich die vollständigen Integrale mit den anderen zusammenfassen, und es wird schliesslich:

$$x=-\frac{1}{y+b}\sqrt{4a^2y^2-(y^2+b^2)^2}+\frac{2ab}{a+b}\int_{\psi}^{\pi/2}\frac{d\psi}{\Delta\psi}-(a+b)\int_{\psi}^{\pi/2}\Delta\psi.d\psi$$

Einführung der elliptischen Funktionen.

Setzen wir $\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\Delta\psi}=F(\psi,k)=u$, so ergiebt sich:

(1) $\psi=am\,(u,k)$

(2) $sin\,\psi=sin\,am\,(u,k)=\frac{b-y}{y+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

(3) $cos\,am\,(u,k)=\frac{1}{\sqrt{a-b}\,(y+b)}\sqrt{2b\,[2ay-(y^2+b^2)]}$

(4) $\Delta am\,(u,k)=\sqrt{1-k^2\,sin^2\,\psi}$

$$=\frac{1}{\sqrt{a+b}\,(y+b)}\sqrt{2b\,[2ay+(y^2+b^2)]}$$

Aus Gl. (2) ergiebt sich

$$y=b.\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\,sin\,am\,(u,k)}{\sqrt{a-b}\,sin\,am\,(u,k)+\sqrt{a+b}}$$

oder nach Division des Zählers und Nenners durch $\sqrt{a+b}$:

$$y=b.\frac{1-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.sin\,am\,(u,k)}{1+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.sin\,am\,(u,k)}$$

(a) $$=b.\frac{1-\sqrt{k}.sin\,am\,(u,k)}{1+\sqrt{k}.sin\,am\,(u,k)}$$

Setzen wir den für y gefundenen Wert in die Gleichung unserer Rollcurve ein:

$$x = -\frac{1}{y+b}\sqrt{4a^2y^2-(y^2+b^2)^2} - \frac{2ab}{a+b}F(\psi,k(+)a+b)\,E(\psi,k)-C$$

so ergiebt sich für x folgender Ausdruck in u und dessen Funktionen:

$$x = -\frac{1}{1+\sqrt{k}\,sin\,am\,(u,k)}\sqrt{e^2k^2\,sin^4 am\,(u,k) - 2(a^2+b^2)k\,sin^2 am\,u + e^2}$$

$$-\frac{2ab}{a+b}\cdot u + (a+b)\int_0^u \Delta(am\,u)^2\,du - C$$

$$= -\frac{1}{1+\sqrt{k}\,.\,sin\,am\,(u,k)}\sqrt{e^2k^2\,sin^4\,am\,(u,k\,(-2)a^2+b^2)k\,sin^2\,am\,u+e^2}$$

$$-\frac{2ab}{a+b}\cdot u + (a+b)\left[\frac{E}{K}u + Z(u)\right] - C$$

$$\text{(b)} = -\frac{1}{1+\sqrt{k}\cdot sin\,am\,(u,k)}\sqrt{e^2k^2\,sin^4\,am\,(u,k) - 2(a^2+b^2)\,k\,sin^2\,am\,u+e^2}$$

$$+\frac{(a+b)^2\cdot\frac{F}{K}-2ab}{a+b}u + (a+b)Z(u) - C$$

wobei unter $Z(u)$ der periodische Teil des Ausdruckes für $E(am\,u)$ zu verstehen ist, welcher folgende Gestalt hat:

$$Z(u) = \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{9}{1-q^2}\,sin\,\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\,sin\,\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right\}$$

wobei q eine gewisse von K u. K abhängige Grösse ist, $q = e^{-\frac{\pi\,.\,K'}{K}}$

Da $sin\,am\,(u,k)$ eine reelle Periode vom Index $4K$ besitzt, sodass

$$sin\,am\,(u \pm K) = sin\,am\,(u,k)$$

ist, bleibt der Wert von y unverändert, wenn u um $4K$ zu- oder abnimmt; damit ist gleichzeitig ein Wachsen des x um den ganzen Umfang der Ellipse verbunden. Die Curve besitzt also periodisch wiederkehrende Punkte, wie in der folgenden Diskussion derselben näher auseinandergesetzt ist.

Die vom Brennpunkt der Ellipse beschriebene Curve hat Ähnlichkeit mit der gestreckten Cycloide; sie hat einen periodischen

Verlauf, sodass nach einer ganzen Umwälzung der Ellipse sich die Curve wiederholt.

1. Bestimmung der Maxima und Minima.

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4a^2y^2-(y^2+b^2)^2}}{b^2+y^2}$$

Setzen wir die erste Abgeleitete gleich Null, so ergiebt sich für y der Wert $y=a\pm e$ die zweite Abgeleitete ist:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4a^2y(b^2-y^2)}{(b^2+y^2)^3}$$

α) Für $y=a+e$ wird:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b^2-(a+c)^2}{2a(a+e)^2} = -\frac{e}{a(a+e)}$$

da der Ausdruck negativ ist, findet Maximum statt.

β) Für $y=a-e$ wird:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{e}{a(a-e)}$$

da Ausdruck ist positiv, es findet also Minimum statt.

In den Punkten deren:

$$\begin{cases} x=0,\ \ldots\ n. \text{ Ellipsenbogen } \left[4naE\left(\frac{\pi}{2},k\right)\right] \\ y=a-e \end{cases}$$

hat die Curve ein Minimum, dagegen in Punkten, deren

$$\begin{cases} x=(2n-1).2aE\left(\frac{\pi}{2},k\right) \\ y=a+e \end{cases}$$

findet Maximum statt.

2. Bestimmung der Wendepunkte.

Aus der Bedingung $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ folgt $y=b$ die Untersuchung der zu $y=b+h$ (wobei h ein kleiner Zuwachs sei) gehörigen Werte von $\frac{d^2y}{dx^2}$ ergiebt, dass die Curve vor $y=b$ convex und nach $y=b$ concav ist, dass also ein Wendepunkt vorliegt und zwar entspricht derselbe der Lage der rollenden Curve, bei welcher ein Neben-

scheitelpunkt der Berührungspunkt mit der x-Axe ist. Auch die Wendepunkte wiederholen sich periodisch.

Für den speciellen Fall $a=b$ geht die Ellipse in einen Kreis über. Der Brennpunkt wird zum Mittelpunkt desselben und die Curve, welche alsdann der Brennpunkt beschreibt, wenn der Kegelschnitt auf der x-Axe rollt, ist eine Gerade, im Abstand a parallel zur Axe; ihre Gleichung also $y-a=0$.

Zu diesem Resultat gelangen wir auch auf analytischem Wege, wenn wir in unserer ursprünglichen Differentialgleichung für die Rollcurve $a=b$ setzen.

Wir erhalten:

$$\int \frac{a^2+y^2}{\sqrt{-(y^2-a^2)^2}}\,dy = x+C$$

$$\frac{2a^2}{\sqrt{-1}}\int \frac{dy}{y^2-a^2}+\frac{1}{\sqrt{-1}}y=x+C$$

$$-\frac{a}{\sqrt{-1}}\,l\,\frac{a+y}{a-y}+\frac{1}{\sqrt{-1}}y=x+C;\ \text{für } x=0, y=a$$

folgt hieraus:

$$log\,\frac{a+y}{a-y}=\infty$$

und wie oben $y-a=0$.

II. Bestimmung der Rollcurve, welche ein Brennpunkt der Hyperbel beschreibt, wenn diese auf einer Geraden rollt.

Durch die Gleichung

$$(1)\quad r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

wird der eine Ast der Hyperbel repräsentiert, welchen wir als rollende Curve betrachten wollen, während wir den zweiten Ast nicht näher untersuchen.

In Gl. (8) der Einleitung ist dann:

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\ \text{u.}\ p=\frac{b^2}{a};$$

durch Einsetzung dieser Werte geht (8) über in:

$$x + C = \int \frac{b^2 - y^2}{\sqrt{4a^2y^2 - (y^2 - b^2)^2}}\, dy$$

Den Ausdruck 4. Grades unter dem Wurzelzeichen stellen wir der als das Produkt der vier Wurzelfaktoren $-(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)$, wobei

$$y_4 = a + e \quad y_2 = a - e$$
$$y_3 = -a + e \quad y_4 = -a - e$$

ist, sodass $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$; y liegt zwischen $e+a$ und $e-a$ d. h. zwischen y_3 und y_4.

Wir wenden nun auf das ganze Integral die lineare Substitution an:

$$y = \frac{v + sz}{1 + z}$$

$$\text{also } dy = \frac{s - r}{(1+z)^2}\, dz$$

Wie bei der Ellipse, ergeben sich auch hier:

$$v = b; \quad s = -b$$
$$s - r = -2b$$
$$B = +4a^2b^2; \quad b_1 = -\frac{b+e}{b-e}; \quad b_2 = -\frac{b-e}{b+e}$$

Unser Integral nimmt in Folge dieser Umwandlungen folgende Gestalt an:

$$-2b^3 \int \frac{1 - \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^2}{\sqrt{4b^2a^2\left(z^2 + \frac{b+e}{b-e}\right)\left(z^2 + \frac{b-e}{b+e}\right)}}\, dz$$

(3) oder $$-8b^3 \int \frac{\frac{z}{(1+z)^2}}{\sqrt{4a^2b^2\left(z^2 - \frac{e-b}{e+b}\right)\left(z^2 - \frac{e+b}{e-b}\right)}}$$

Die im Zähler stehende Funktion von z formen wir derart um, dass sie als Summe einer Funktion von geraden und einer anderen von ungeraden Potenzen von z erscheint:

$$(4) \quad \frac{z}{1+z+2z} = \frac{z(1+z^2) - 2z^2}{(1+z^2)^2 - 4z^2} = -\frac{2z^2}{(1-z^2)^2} + z\frac{1+z^2}{(1-z^2)^2}$$

Das zweite hierdurch auftretende Integral:

$$\int \frac{z(1+z^2)}{(1-z^2)^2\sqrt{Z}}dz$$

formen wir um durch die Substitution:

$$z^2 = v$$
$$2z\,dz = dv$$

sodass dieses übergeht in die beiden folgenden:

$$\frac{1}{2}\int \frac{dv}{(1-v)^2\sqrt{Z}} + \frac{1}{2}\int \frac{v.dv}{(1-v)^2\sqrt{Z}}$$

Setzen wir hierin den Z entsprechenden Wert ein, so ergiebt sich:

(5) $$\frac{1}{4b}\int \frac{dv}{(1-v)\sqrt{a^2v^2-2(e^2+b^2)v+a^2}} + \frac{1}{4b}\int \frac{v\,dv}{(1-v)^2\sqrt{a^2v^2-2(e^2+b^2)v+a^2}}$$

Durch die Substitution von

$$1-v = n$$
$$dv = -du$$

erscheinen diese zwei Integrale unter der Form:

(6) $$-\frac{1}{2b}\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2u^2+4b^2u-4b^2}} + \frac{1}{4b}\int \frac{du}{u\sqrt{a^2u^2+4b^2u-4b^2}}$$

Nun ist aber:

$$\int \frac{du}{u^n\sqrt{U}} = -\frac{\sqrt{U}}{(n-1)\gamma\cdot u^{n-1}} - \frac{n-\frac{3}{2}}{n-1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{U}} - \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\int \frac{du}{u^{n-2}\sqrt{U}}$$

wobei $\sqrt{U} = \sqrt{\alpha u^2+\beta u+\gamma} = \sqrt{a^2u^2+4b^2u-4b^2}$ u. hiernach:

(7) $$-\frac{1}{2b}\int \frac{du}{u^2\sqrt{U}} + \frac{1}{4b}\int \frac{du}{u\sqrt{U}} = -\frac{1}{2b}\left[\frac{-\sqrt{U}}{-4b^2u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{U}}\right.$$

$$+\frac{1}{4b}\int \frac{du}{u\sqrt{U}} = -\frac{1}{8b^3}\cdot\frac{\sqrt{au^2+4b^2u-4b^2}}{u}$$

Durch Einführung des Wertes $u = 1-z^2$ geht dieser Ausdruck über in:

(8) $$-\frac{1}{8b^3}\cdot\frac{\sqrt{a^2z^4-2(e^2+b^2)z+a^2}}{1-z^2}$$

Führen wir für z noch seinen Wert $z = \frac{b-y}{b+y}$ ein, so ergiebt sich als Endresultat für das zweite Integral in (4):

(9) $$-8b^3\int \frac{z(1+z^2)\,dz}{(1-z^2)^2\sqrt{Z}} = +\frac{1}{2y}\sqrt{4a^2y^2-(y^2-b^2)^2}$$

Das erste Integral in (4) wird folgendermassen behandelt:

$$-2\int\frac{z^2\,dz}{(1-z^2)^2\sqrt{Z}}=-2\left\{\int\frac{dz}{(1-z^2)^2\sqrt{Z}}-\int\frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{Z}}\right\}$$

$$(10)\quad =-2\left\{\int\frac{dz}{(z^2-1)^2\sqrt{Z}}+\int\frac{dz}{(z^2-1)\sqrt{Z}}\right\}$$

Wie bei der Entwicklung der Gleichung der Rollcurve, bei der Ellipse wenden wir auch hier folgende Reduktionsformel an:

$$\frac{z\sqrt{Z}}{(z^2+c)^{n-1}}=a'\int\frac{dz}{(z^2+c)^{n-3}\sqrt{Z}}+b'\int\frac{dz}{(z^2+c)^{n-1}\sqrt{Z}}$$

$$+c'\int\frac{dz}{(z^2+c)^{n-1}\sqrt{Z}}+d'\int\frac{dz}{(z^2-c)^n\sqrt{Z}}$$

wobei wieder:

$$(11)\quad\begin{cases}a'=-(2n-5)B_4\\ b'=-(2n-4)(B_2-3cB_4)\\ c'=-(2n-3)(B_0-2cB_2+3c^2B_4)\\ d'=-(2n-2)(-cB_0+c^2B_2-c^3B_4)\end{cases}$$

$$\sqrt{Z}=\sqrt{B_4(z^2-b_1)(z^2-b_2)}=\sqrt{B_4z^4+B_2z^2+B_0}$$

$$=\sqrt{4b^2a^2z^4-8b^2(e^2+b^2)z^2+4b^2a^2}\text{ ist.}$$

Setzen wir für B_4, B_2, B_0 c und n die betreffenden Werte ein, so ergiebt sich:

$$(11^a)\quad\begin{cases}a'=4b^2a^2\\ b'=0\\ c'=+32b^4\\ d'=+32b^4\end{cases}$$

Demnach wird das Integral in (10):

$$-2\left\{\int\frac{dz}{(z^2-1)^2\sqrt{Z}}+\int\frac{dz}{(z^2-1)\sqrt{Z}}\right\}$$

$$=-2\left\{\frac{z\sqrt{Z}}{d'(z^2-1)}-\frac{a'}{d'}\int\frac{(z^2-1)}{\sqrt{Z}}dz-\frac{c'}{d'}\int\frac{dz}{(z^2-1)\sqrt{Z}}\right\}-2\int\frac{dz}{(z^2-1)\sqrt{Z}}$$

$$(12)\quad =-\frac{z\sqrt{Z}}{16b^4(z^2-1)}+\frac{a^2}{4b^2}\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{Z}}-\frac{a^2}{4b^2}\int\frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

Das in (12) enthaltene Integral $\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{Z}}$ formen wir um durch die Substitution

$$z = \sqrt{\frac{e-b}{e+b}}\sin\psi$$

$$dz = \sqrt{\frac{e-b}{e+b}}\cos\psi\, d\psi;\quad \frac{e-b}{e+b} = k$$

Hierdurch geht es über in:

$$(13)\quad \int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{Z}} = \frac{1}{2ab}\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{\left(z^2 = \frac{e-b}{e+b}\right)\left(z^2 - \frac{e+b}{e-b}\right)}}$$

$$= -\frac{e-b}{2b(e+b)^2}\int\frac{\sin^2\psi\,.\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$

$$(14)\quad = -\frac{e-b}{2b(e+b)^2}\int\frac{\sin^2\psi\,.\,d\psi}{\Delta\psi}$$

Da nun:

$$\frac{\sin^2\psi}{\Delta\psi} = \frac{k^2\sin^2\psi}{k^2\Delta\psi}$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{\Delta(\psi)} - \Delta(\psi)\right)$$

ist, so geht durch Einsetzung dieses Ausdrucks (14) über in:

$$-\frac{1}{2b(e-b)}\left(F(\psi,k) - E(\psi,k)\right)$$

Wir erhalten also für das in (10) enthaltene Integral den Wert:

$$(15)\quad +16b^3\int\frac{z^2\,dz}{(1-z^2)^2\sqrt{Z}} = +\frac{z\sqrt{Z}}{2b(z^2-1)} + \frac{a^2}{e-b}F(\psi,k)$$

$$-\frac{a^2}{e-b}E(\psi,k) + 2a^2b\int\frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

Das Integral

$$\int\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{1}{2ba}\int\frac{dz}{\sqrt{\left(z^2 - \frac{e-b}{e+b}\right)\left(z^2 - \frac{e+b}{e-b}\right)}}$$

geht durch die Substitution:

$$z = \sqrt{\frac{e-b}{e+b}}\sin\psi$$

über in:

$$-\frac{1}{2b(e+b)}F(\psi,k)$$

In (15) hatte dies Integral noch den Faktor $2a^2 b$, durch Multiplication mit demselben geht es über in: $-\frac{a^2}{e+b}F(\psi, k)$; wird wird hierzu nach (15) $\frac{a^2}{e-b}F(\psi,k)$ addiert, so hat man: $2bF(\psi,k)$ und (15) geht über in:

$$(16)\quad \frac{z\sqrt{Z}}{2b(z^2-1)}+2bF(\psi,k)-(e+b)E(\psi,k)$$

Setzen wir hierin noch die Werte von z und Z ein, so ergiebt sich für das erste Integral in (4):

$$(17)\quad 16b^3\int\frac{z^2\,dz}{(1-z^2)^2\sqrt{Z}}=-\frac{(b-y)}{2y(y+b)}\sqrt{4a^2y^2-(y^2-b^2)^2}+2bF(\psi,k)-(e+b)E(\psi,k)$$

Fassen wir die in (9) und (17) gefundenen Resultate zusammen, so ergiebt sich als Gleichung der Rollcure der Hyperbel:

$$(\mathrm{II},2^a)\quad x+Const.=\frac{1}{y+b}\sqrt{4a^2y^2-(y^2-b^2)^2}+2bF(\psi,k)-(e+b)E(\psi,k)$$

Der Zusammenhang zwischen ψ, y, k, a, b u. e ist folgender:

$$k=\frac{e-b}{e+b}$$

$$\sin\psi\left(=z\sqrt{\frac{e-b}{e+b}}\right)=\frac{b-y}{y+b}\sqrt{\frac{e+b}{e-b}}$$

Bestimmung der Integrations-Constanten.

Als Anfangslage der Hyperbel nehmen wir diejenige, bei welcher die Hauptaxe mit der y-Axe zusammenfällt, zu dem Wort $x=0$ gehört $y_0=e-a$; der Wert für $\sin\psi$ für $y=e-a$ ergiebt sich folgendermassen:

$$\sin\psi_0=\frac{b-(e-a)}{b+(e+a)}\sqrt{\frac{e+b}{e-b}}$$
$$=\frac{b^2-(e-a)^2}{(b^2-(e-a))^2}\cdot\frac{e+b}{\sqrt{e^2-b^2}}$$
$$=\frac{2a(e-a)(e+b)}{2a(e-a)(e+b)}=1$$

es ist mithin $\psi_0=90^0=\frac{\pi}{2}$

Der Wert der Constanten ist also:

$$C = \frac{1}{y_0 + b}\sqrt{4a^2 y_0{}^2 - (y_0{}^2 - b^2)^2} + 2b\,F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - (e+b)\,E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

Da der erste Teil dieses Ausdrucks durch Einsetzung von $y_0 = a - e$ zu 0 wird, so erhalten wir:

$$C = 2b\,F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - (e+b)\,E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$
$$= 2b\,.\,K - (e+b)\,E$$

Einführung der elliptischen Funktionen.

Aus

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} = F(\psi, k) = u$$

ergiebt sich:

(1) $\psi = am(u,k)$

(2) $\sin\psi = \sin am\,(u,k) = \frac{b-y}{y+b}\sqrt{\frac{e+b}{e-b}}$

(3) $\cos am\,(u) = \frac{1}{\sqrt{e-b}\,(y+b)}\sqrt{2b\,[2ey - (y^2+b^2)]}$

(4) $\Delta am\,(u,k) = \frac{1}{\sqrt{e+b}\,(y+b)}\sqrt{2b\,[2ey + (y^2+b^2)]}$

Aus Gl. (2) ergiebt sich:

$$y = b\,\frac{1 - \sqrt{\frac{e-b}{e+b}}\,\sin am\,(u,k)}{1 + \sqrt{\frac{e-b}{e+b}}\,\sin am\,(u,k)}$$

$$\text{(a)} \quad = b\,.\,\frac{1 - \sqrt{k}\,.\,\sin am\,(u,k)}{1 + \sqrt{k}\,.\,\sin am\,(u,k)}$$

Durch Einsetzung dieses Wertes in Gleichung (II, 2a) ergibt sich für x der folgende Wert:

$$x = \frac{1}{y+b}\sqrt{4a^2 y^2 - (y^2 - b^2)^2} + 2b\,F(\psi,k) - (e+b)\,E(\psi,k) - Const.$$

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{k}\,.\,\sin am\,(u,k)}\sqrt{a^2k^2 \sin^4 am(u,k) - 2(e^2+b^2)\,k\sin^2 am\,u + a^2}$$

$$+ 2b\,u - (e+b)\left[\frac{F}{K}\,u + Z(u)\right] - C$$

$$(b) = \frac{1}{1+\sqrt{k}.sinam(u,k)}\sqrt{a^2(\sqrt{k}sinamu)^4 - 2(e^2+b^2)(\sqrt{k}sinamu)^2+a^2}$$
$$+\frac{2bK-(e+b)E}{K}u-(e+b)Z(u)-C$$

Die Periode ist $4k$; wächst u um $4k$, so wächst x um

$$4[2bK-(e+b)E] = -4\frac{e-b}{e+b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\Delta\psi}\left(1-\frac{e-b}{e+b}\sin^2\psi\right)$$

Diese Grösse ist negativ, und darauf beruht die rückschreitende Bewegung des erzeugenden Punktes.

Auch hier bedeuten wie bei der Ellipse K und E die vollständigen Integrale I resp. II. Gattung und $Z(u)$ ist wieder der periodische Teil des Ausdruckes für $E(amu,k)$.

Die bei dem Rollen der Hyperbel vom Brennpunkt derselben beschriebene Curve gleicht der Gestalt nach der verschlungenen Cykloide, die bekanntlich von Punkten ausserhalb der Kreisfläche erzeugt werden, wenn der Kreis auf einer Geraden rollt. Der Teil AB unserer Rollcurve wurde vom Brennpunkt beschrieben, während der Ast RS der Hyperbel auf der oberen Seite der x-Axe rollte. Die äussersten Punkte A und B dieses Teiles der Curve haben zur Ordinate b; der Brennpunkt nimmt diese äusserste Lage ein, wenn der im Unendlichen gelegene Peripheriepunkt des Hyperbel-Astes mit der x-Axe zusammenfällt, oder bis diese zur Tangente an die Hyperbel geworden ist. Die x-Axe fällt also dann mit einer der Asymptoten zusammen, der Schnittpunkt der x-Axe mit der anderen Asymptote (D) ist von B um e entfernt. Der Lage $R'S'$ des einen Hyperbel-Astes entspricht die Lage UV des anderen; lassen wir nun diesen auf der unteren Seite der x-Axe abrollen, so beschreibt der Brennpunkt den zweiten Teil der Rollcurve von B bis C, und zwar hat er die äusserste Lage C erreicht, wenn der Ast UV der Hyperbel die Lage $U'V'$ einnimmt, bei welcher die x-Axe wieder mit einer der Asymptoten zusammenfällt. Die Ordinate von C ist $y=b$.

Der höchste Punkt E dieses zweiten Teiles der Curve hat zur Ordinate $y=e+a$, während der tiefste Punkt der Curve, G, zur

$y = e - a$ hat. Dies ergiebt sich auch aus der analytischen Untersuchung.

Bestimmung der Maxima und Minima.

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{4a^2 y^2 - (y^2 + b^2)^2}}{b^2 - y^2}$$

Setzen wir diese erste Abgeleitete $= 0$, so ergiebt sich für y der Wert $a \pm e$. Der Wert der zweiten Abgeleiteten ist:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{4a^2 y (b^2 + y^2)}{(b^2 - y^2)^3}$$

Für $y = a + e$ wird:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{4a^2 (a+e)(2ae + 2e^2)}{(-2a^2 - 2ae)^3} = -\frac{e}{a(a+e)}$$

Es findet also im Punkt E, dessen $y = a + e$ ist, ein Maximum statt. — Für $y = a - e = -(e - a)$ ergiebt sich für

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{e}{a(e-a)}$$

Dies zeigt an, dass im Punkt E_1, dessen $y = -(e - a)$ ist, ein Maximum stattfindet. Es ist dies diejenige Lage des zum Hyperbel-Aste UV gehörigen Brennpunkts, welche dieser inne hat, während der Brennpunkt des Astes RS in Folge des Rollens von UV die Lage E inne hat.

Die Punkte, in welchen Minima stattfinden, haben zu Ordinaten $y = -(e + a)$ und $y = e - a$; es sind dies die Punkte G_1 u. G, deren Abcissen $= 0$ sind und ferner diejenigen, deren Abcissen $= \pm 4nd$ sind, wobei unter $2d$ der Unterschied zwischen der ganzen Asymptote und der ganzen Hyperbel zu verstehen ist. Es ist nämlich das Stück der x-Axe von O bis ins Unendliche gleich der halben Hyperbel, die wir uns auf jenem Stücke abgerollt denken; von D aus bis ins Unendliche erstreckt sich die eine Asymptote. Es ist also die Strecke $DO = d$ gleich dem Unterschied zwischen Asymptote und halbem Hyberbelbogen oder die doppelt so grosse Strecke $OF = 2d$ giebt den Unterschied zwischen der ganzen Asymptote und der ganzen Hyperbel an. Der Wert für d ist nun:

$$\frac{\pi a}{4\varepsilon}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2\varepsilon^2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{1}{3\varepsilon^4}+\ldots\right\}$$

Derselbe ergiebt sich aus dem Ausdruck für den Unterschied eines Stückes der Asymptote und dem zugehörigen Bogenstück der Hyperbel, wenn man zur Grenze übergeht; ε ist hierbei

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{e}{a},$$

sodass:

$$d=\frac{\pi a^2}{4e}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{a^2}{2e^2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\frac{a^4}{3e^4}+\ldots\right\}.$$

Wir haben also bei der Rollcurve der Hyperbel periodische Maxima und Minima wie auch bei der Rollcurve der Ellipse; während bei letzterer diese Punkte um ganze Ellipsenbögen von einander entfernt waren, ist bei der Rollcurve der Hyperbel der Unterschied zwischen Asymptote und Hyperbel-Bogen von besonderer Bedeutung, indem die Maxima und Minima von einander um je das Vierfache jener Strecke entfernt sind.

Da $\frac{d^2y}{dx^2}$ nicht zu 0 werden kann, so sind auch keine Wendepunkte vorhanden, wie der Anblick der Figur auch ergiebt.

III. Bestimmung der Rollcurve, welche der Brennpunkt der Parabel beschreibt, wenn diese auf einer Geraden rollt.

1. Ableitung.

Da $\varepsilon^2=1$ bei der Parabel ist, lautet die Polargleichung derselben

$$(1)\qquad r=\frac{p}{1+\cos\varphi}$$

und die Differentialgleichung (8) der Rollcurve lautet demnach:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{4p^2y^2-p^4}}{p^2}=\frac{\sqrt{4y^2-p^2}}{p}$$

Durch Integration ergiebt sich hieraus:

$$(2)\qquad \int\frac{p}{\sqrt{4y^2-p^2}}\,dy=x+Const.$$

Führen wir an Stelle des halben Parameters p den Wert $\frac{P}{2}$ ein, so wird:

$$(2') \quad P\int \frac{dy}{\sqrt{(4y)^2 - P^2}}\, dy = x + C;$$

folglich:

$$(3) \quad \frac{P}{4} l\,(4y + \sqrt{16y^2 - P^2}) = x + C$$

Ist die primitive Stellung der Parabel nun diejenige, dass ihre Axe mit der y-Axe zusammenfällt, so gehört zu $x = 0$ der Wert

$$y_0 = \frac{P}{4}$$

und für die Constante ergiebt sich

$$C = \frac{P}{4} l\, P$$

Durch Einsetzung dieses Wertes der Constanten in (3) ergiebt sich die Gleichung der Rollcurve:

$$(4) \quad l\frac{y + \sqrt{y^2 - \left(\frac{P}{4}\right)^2}}{\frac{P}{4}} = \frac{x}{\frac{P}{4}}$$

Setzen wir noch an Stelle von $\frac{P}{4}$ den Abstand d des Brennpunkts vom Scheitel, so ergiebt sich:

$$(\text{III}, 2_a) \quad l\frac{y + \sqrt{y^2 - d^2}}{d} = \frac{x}{d}$$

Zur derselben Gleichung gelangen wir auf folgendem Wege:

2. Ableitung.

Die Grundgleichungen, von welchen wir zur Bestimmung der allgemeinen Differential-Gleichung der Rollcurven ausgingen, waren:

$$(1) \quad y = \frac{r}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

$$\frac{r}{r'} = \frac{1}{y'}$$

wobei:

$$y' = \frac{dy}{dx}; \quad r' = \frac{dr}{d\varphi}$$

und

$$r = \frac{p}{1+\cos\varphi} = \frac{2d}{1+\cos\varphi} = \frac{d}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

war.

Demnach ist:

$$r' = d \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos^3\frac{\varphi}{2}}$$

$$(2) \qquad y' = tg\frac{\varphi}{2}$$

Da nach (1)

$$y^2 = \frac{r}{1+y'^2}$$

ist, so ergiebt sich durch Einsetzung des Wertes von r

$$y^2 = \frac{d^2}{\cos^4\frac{\varphi}{2}(1+y'^2)} = \frac{d^2\left(1+tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^2}{1+y'^2}$$

$$(3) \qquad = \frac{d^2(1+y'^2)^2}{1+y'^2} = d^2(1+y'^2)$$

Durch Integration der Differential-Gleichung (3) ergiebt sich

$$l\frac{y+\sqrt{y^2-d^2}}{Const.} = \frac{x}{d}$$

und für Const. ergiebt sich hieraus der Wert d, sodass unsere Endgleichung mit der oben gefundenen übereinstimmt:

$$(4) \qquad l\frac{y+\sqrt{y^2-d^2}}{d} = \frac{x}{d}$$

Aus Gl. (4) folgt, dass y^2 nie kleiner als d^2 oder y nicht kleiner als d werden kann, welches die Entfernung des Brennpunkts in seiner tiefsten Lage von der x-Axe ist.

Aus (4) folgt:

$$(5\alpha) \qquad \frac{y+\sqrt{y^2+d^2}}{d} = e^{\frac{x}{d}}$$

und ferner:

$$(5\beta) \qquad \frac{d}{y+\sqrt{y^2-d^2}} = e^{-\frac{x}{d}}$$

mithin

$$e^{\frac{x}{d}} + e^{-\frac{x}{d}} = \frac{2y}{d}$$

$$y = \frac{d}{2}\left(e^{\frac{x}{d}} + e^{-\frac{x}{d}}\right)$$

$$= \frac{P}{8}\left(e^{\frac{x}{P/8}} + e^{-\frac{x}{P/8}}\right)$$

Die vom Brennpunkt der Parabel beschriebene Rollcurve ist also eine Kettenlinie vom Parameter $\frac{P}{4}$; die Curve erstreckt sich symmetrisch auf beiden Seiten der Ordinatenaxe.

Lebenslauf.

Verfasser ist geboren am 21. Juni 1859 zu Battenberg, Kreis Biedenkopf, erwarb sich das Zeugniss der Reife in Wiesbaden und widmete sich dann auf den Universitäten Marburg und Strassburg dem Studium der Mathematik, Physik und beschreibenden Naturwissenschaften. Im Wintersemester 1882—83 erwarb sich derselbe von der königlichen wissenschaftlichen Prüfungs-Commission zu Marburg das Zeugniss pro facultate docendi und ist seit Herbst 1883 im höheren Schuldienst thätig.